Chapitre 11

Calcul matriciel et résolution pratique de systèmes linéaires

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, $n,p,q,r \in \mathbb{N}^*$ et le corps $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Matrices

1.1 Définitions et notations

Définition 11.1 (Matrice, ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$)

On appelle <u>matrice</u> à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$, toute famille

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$$

avec $a_{ij} \in \mathbb{K}$. Une telle matrice est dite de <u>taille (n,p)</u>.
On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, a_{ij} est appelé coefficient d'indice (i,j). Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité sur les valeurs n, p, on pourra noter $A = (a_{ij})$ sans préciser les valeurs possibles prises par i et j.
Une matrice de taille (n,p) peut être vu comme un tableau à n lignes, p colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Remarque. Il y a ambiguité sur la notation : l'écriture a_{123} peut désigner a_{ij} pour $(i,j) = (12,3)$ ou $(i,j) = (1,23)$. En pratique, cela ne pose que *très* rarement problème. Si c'est le cas, on pourra noter $a_{i,j}$ plutôt que a_{ij}, de sorte qu'on distingue bien $a_{12,3}$ et $a_{1,23}$.

Définition 11.2 (Matrices de formes particulières)

- Toute matrice n'ayant qu'une seule ligne ($n = 1$) est appelée matrice ligne. C'est donc un élément de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$.
- Toute matrice n'ayant qu'une seule colonne ($p = 1$) est appelée matrice colonne. C'est donc un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
- Une matrice avec n lignes et n colonnes est appelée matrice carrée de taille n. C'est donc un élément de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. On note
$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) := \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$$

Remarque. Contrairement à la notation a_{ij}, pour l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la virgule est obligatoire : $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices de taille (np, np) !

Exemple 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R}) \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & i & 2-i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \qquad C = \begin{pmatrix} \pi \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$$

Exemple 2. La matrice nulle de taille (n,p) :

$$0_{n,p} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

La matrice identité de taille n :

$$I_n := \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \mathbf{0} \\ & & 1 & \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Définition 11.3

Deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont dites égales et on note $A = B$ si tous leurs coefficients sont égaux. Il s'agit d'une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1.2 Addition et multiplication par un scalaire

Définition 11.4 (+ et $\lambda\cdot$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$)

Soit $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$. On définit la matrice $A+B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij})$$

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit la matrice $\lambda A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par

$$\lambda A := (\lambda a_{ij})$$

Exemple 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -11 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A + B = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -14 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad 2A = \begin{pmatrix} -2 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad -A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Exemple 4. Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $0A = 0_{n,p}$ et $1A = A$.

Proposition 11.5

$(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe abélien.

Démonstration. On vérifie toutes les assertions de la définition. Soit $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in \mathbb{K}$ leurs coefficients d'indice (i, j) respectifs.

□

Remarque. Attention ! On ne peut pas additionner des matrices de tailles différentes. L'opération $A+B$ n'a de sens que si A,B ont le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes.

1.3 Produit matriciel

Définition 11.6 (Produit matriciel)

Soit $A=(a_{ik})\in\mathcal{M}_{n,\boxed{p}}(\mathbb{K})$ et $B=(b_{kj})\in\mathcal{M}_{\boxed{p},q}(\mathbb{K})$. On définit le <u>produit</u> de A et B par :

$$AB := (c_{ij})\in\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}) \qquad c_{ij} := \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

$$\boxed{p}\text{ lignes}\ \overbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{1j} & \\ & \vdots & \\ & b_{kj} & \\ & \vdots & \\ & b_{kp} & b_{pq} \end{pmatrix}}^{q\text{ colonnes}}$$

$$n\text{ lignes}\ \overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ & & & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{ip} \\ & & & & \\ & & & & a_{np} \end{pmatrix}}^{\boxed{p}\text{ colonnes}} \begin{pmatrix} & & \\ & c_{ij} & \\ & & \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$$

Exemple 5. Si $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ et $B=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, alors

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix} \qquad\qquad BA=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

Exemple 6. Si $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0 & 0\\ 0 & \alpha_2 & 0\\ 0 & 0 & \alpha_3\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}\beta_1 & 0 & 0\\ 0 & \beta_2 & 0\\ 0 & 0 & \beta_3\end{pmatrix}$, alors

$$AB = \qquad\qquad \text{et} \qquad BA =$$

Remarque. Pour que le produit AB ait un sens, il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B. Le produit

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{n'a pas de sens mais...}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{a un sens}$$

On observe que si le produit AB a un sens, il se peut que le produit BA n'en ait pas ! Mais même lorsque BA a également un sens, on verra qu'en général $AB \neq BA$.

Proposition 11.7 ("Associativité" du produit)

Soit $(A,B,C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. Alors

$$(AB)C = A(BC)$$

Démonstration. Pour toute matrice X, on notera $[X]_{ij}$ son coefficient d'indice (i,j).
Pour tous $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,r]\!]$, on a

$$[(AB)C]_{ij} = \sum_{k=1}^{q} [AB]_{ik}[C]_{kj} = \sum_{k=1}^{q} \left(\sum_{\ell=1}^{p} [A]_{i\ell}[B]_{\ell k} \right) [C]_{kj} = \sum_{k=1}^{q} \sum_{\ell=1}^{p} a_{i\ell} b_{\ell k} c_{kj}$$

$$[A(BC)]_{ij} = \sum_{k=1}^{p} [A]_{ik}[BC]_{kj} = \sum_{k=1}^{p} [A]_{ik} \left(\sum_{\ell=1}^{q} [B]_{k\ell}[C]_{\ell j} \right) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{\ell=1}^{q} a_{ik} b_{k\ell} c_{\ell j}$$

Les variables k et ℓ de ces sommes étant muettes, on peut donc les permuter :

$$[A(BC)]_{ij} = \sum_{\ell=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} a_{i\ell} b_{\ell k} c_{kj}$$

Enfin, on peut permuter les deux sommes, car cela équivaut à les retransformer en : $\sum_{(\ell,k)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]} (\dots)$ Finalement $[(AB)C]_{ij} = [A(BC)]_{ij}$. Par arbitraire sur i, j, on en déduit que $(AB)C = A(BC)$. $\square$

Proposition 11.8 (Bilinéarité du produit)

Soit A, B, C trois matrices. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors, lorsque les opérations ci-dessous ont un sens :

$$(\lambda A + \mu B)C = \lambda AC + \mu BC$$

$$A(\lambda B + \mu C) = \lambda AB + \mu AC$$

En particulier, $\lambda(AB) = A(\lambda B) = (\lambda A)B$.

2 L'anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$

2.1 Structure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Le but de cette partie est de montrer que $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau. Il faut donc montrer que :

1. $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +)$ est un groupe abélien.

2. $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \times)$ est un monoide.
3. $\times$ est distributive sur $+$.

L'assertion 1 est vraie par la proposition 11.5. De plus, l'assertion 3 est une conséquence de la proposition 11.8 avec $\lambda = \mu = 1$. Il reste donc à montrer l'assertion 2.

- L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est particulier : comme toutes ses matrices ont n lignes et n colonnes, le produit de deux d'entre elles est toujours bien défini. Ainsi, la loi $\times$ est une l.c.i. sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- De plus, par la proposition 11.7 avec $(p,q,r) = (n,n,n)$, la loi $\times$ est associative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Enfin, la proposition suivante montre que la matrice identité I_n est élément neutre de $\times$:

Proposition 11.9

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $AI_n = I_nA = A$.

Démonstration. Soit $i,k \in [\![1,n]\!]$. Alors

$$[AI_n]_{ik} = \sum_{j=1}^{n} [A]_{ij}[I_n]_{jk}$$

Or, $[I_n]_{jk}$ est nul si $j \neq k$. On peut donc garder uniquement le terme de la somme pour $j = k$: les autres termes sont nuls.

$$[AI_n]_{ik} = [A]_{ik}[I_n]_{kk} = [A]_{ik}$$

Donc par arbitraire sur i,k, on a $AI_n = A$. On montre de même que $I_nA = A$. □

On a donc montré que $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \times)$ est un monoide.

Proposition 11.10

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau. Il est non commutatif si $n \geq 2$.

Démonstration. On a vu plus haut que $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau. Il reste à montrer la non commutativité. On pose

$$A = \begin{pmatrix} & & 2 \\ & \mathbf{0} & \\ 1 & & \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \qquad B = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \mathbf{0} & \\ 1 & & \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Alors

$$AB = \qquad\qquad BA =$$

On en déduit donc que $AB \neq BA$. □

Remarque. L'application

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1(\mathbb{K}) &\to \mathbb{K} \\ (a) &\mapsto a \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'anneaux. On peut alors identifier $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ à $\mathbb{K}$. En particulier, $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ est commutatif.

2.2 Matrices carrées de forme particulière

Définition 11.11 (Matrice scalaire)

On appelle matrice scalaire une matrice de la forme λI_n avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (et $n \in \mathbb{N}^*$).

Notation. Pour tous $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, on note

$$\operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) := \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \mathbf{0} \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Définition 11.12 (Matrice diagonale)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est (une matrice) diagonale s'il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$A = \operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

Autrement dit, $A = (a_{ij})$ est diagonale si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \qquad i \neq j \implies a_{ij} = 0$$

Exemple 7. Les matrices suivantes sont diagonales :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & & & \mathbf{0} \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & n \end{pmatrix} \qquad I_n$$

Exemple 8. Une matrice scalaire est évidemment diagonale. La réciproque est fausse si $n \geq 2$.

Remarque. Si $A = (a_{ij})$, on appelle diagonale de A tous les coefficients a_{ii} avec $1 \leq i \leq n$. Cette notion existe même si A n'est pas une matrice diagonale. Par exemple la diagonale de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est constituée des coefficients 1 et 4.

Proposition 11.13

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices diagonales. Alors AB est une matrice diagonale. De plus, A et B commutent, c'est-à-dire $AB = BA$.

Démonstration. Voir l'exemple 6, qu'il est par ailleurs important de connaitre. □

Remarque. La forme générale d'une matrice diagonale est donc

$$\begin{pmatrix} * & & & \mathbf{0} \\ & * & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & * \end{pmatrix}$$

où chaque symbole $*$ peut être remplacé par une valeur quelconque dans $\mathbb{K}$ (pas forcément la même). Nous allons utiliser ce formalisme régulièrement dans la suite pour présenter les définitions.

Définition 11.14 (Matrice triangulaire)

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On dit que A est <u>(une matrice) triangulaire supérieure</u> si A est de la forme

$$\begin{pmatrix} * & & & \huge{*} \\ & * & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & * \end{pmatrix}$$

ce qui revient à dire que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \qquad i > j \implies a_{ij} = 0$$

- On dit que A est <u>(une matrice) triangulaire inférieure</u> si A est de la forme

$$\begin{pmatrix} * & & & \mathbf{0} \\ & * & & \\ & & \ddots & \\ \huge{*} & & & * \end{pmatrix}$$

ce qui revient à dire que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \qquad i < j \implies a_{ij} = 0$$

- On dit que A est <u>(une matrice) triangulaire</u> si A est triangulaire inférieure ou triangulaire supérieure.

Notation. On note

- $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales de taille n.
- $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de taille n.
- $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires inférieures de taille n.
- $\mathcal{T}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \cup \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires de taille n.

Exemple 9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est triangulaire .... $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ est triangulaire ....

Exemple 10. Une matrice est triangulaire supérieure *et* inférieure si et seulement si elle est diagonale. Autrement dit $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \cap \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K}) = \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 11.15

Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.
Le produit de deux matrices triangulaires inférieures est une matrice triangulaire inférieure.

Plus précisément, on peut vérifier que :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & * \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \beta_1 & & & * \\ & \beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 & & & * \\ & \alpha_2\beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_n\beta_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & 0 \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & \alpha_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \beta_1 & & & 0 \\ & \beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 & & & 0 \\ & \alpha_2\beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & \alpha_n\beta_n \end{pmatrix}$$

2.3 Puissances de matrice

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors A possède autant de lignes que de colonnes, si bien que le produit AA a un sens.

Définition 11.16

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On définit la puissance k-ième de A par :

$$A^k = \underbrace{AA\dots A}_{k \text{ fois}}$$

Par convention, on considère que $A^0 = I_n$.

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ étant un anneau, A^k correspond exactement à l'itéré k-ième de A pour la loi $\times$.

Les matrices carrées sont les seules matrices qu'on peut élever à la puissance. Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec $n \neq p$, alors A^k n'a de sens que si $k = 1$ (et écrire A^1 est maladroit...).

Exemple 11. Si $A = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, alors $A^k = \text{diag}(\alpha_1^k, \dots, \alpha_n^k)$.

Exemple 12. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{2,2}$. Ainsi, si $k \geq 2$, $\quad A^k = A^2A^{k-2} = 0_{2,2}A^{k-2} = 0_{2,2}$.
En particulier, A est un diviseur de zéro dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$: l'anneau $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ n'est donc pas intègre (et de même pour $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geq 2$).

Proposition 11.17 (Calcul dans un anneau – version $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$)

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $m \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{AB = BA} \implies (A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k}$$

$$\boxed{AB = BA} \implies A^m - B^m = (A-B) \sum_{k=0}^{m-1} A^k B^{m-1-k}$$

Exemple 13. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, calculer la puissance m-ième de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.4 Inverse d'une matrice

Définition 11.18 (Matrice inversible)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est inversible si

$$\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \qquad AB = BA = I_n$$

Il n'y a alors qu'une seule matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant cette assertion et on note $A^{-1} := B$. La matrice A^{-1} est appelée la matrice inverse de A.

On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de taille n. Cet ensemble est appelé le groupe linéaire.

Autrement dit, A est inversible si elle est symétrisable pour la loi $\times$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et A^{-1} est son (unique) symétrique pour la loi $\times$. De ce fait, on en déduit immédiatement :

Proposition 11.19

$(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe. En particulier, pour toutes matrices A, B :

- $A \in GL_n(\mathbb{K}) \implies A^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(A^{-1})^{-1} = A$.
- $A, B \in GL_n(\mathbb{K}) \implies AB \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

En particulier, pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et $A \in GL_n(\mathbb{K})$, $\quad A^{-k} := (A^{-1})^k = (A^k)^{-1}$.

Exemple 14. La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible : en effet avec $B = \begin{pmatrix} 2^{-1} & 0 \\ 0 & 3^{-1} \end{pmatrix}$, on vérifie que $AB = BA = I_2$. Ainsi, $B = A^{-1}$.

Exemple 15. La matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible : en effet avec $D = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, on vérifie que $CD = DC = I_2$. Ainsi, $D = C^{-1}$.

Exemple 16. La matrice $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $X^2 = 0_{2,2}$. Ainsi, X n'est pas inversible. En effet, si X était inversible, alors

$$I_2 = X^{-1}X^{-1}XX = X^{-1}X^{-1}0_{2,2} = 0_{2,2}$$

ce qui serait absurde.

Proposition 11.20 (Inversible "d'un seul côté" suffit pour être inversible)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \qquad AB = BA = I_n \qquad$ (càd A est inversible)
2. $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \qquad BA = I_n$
3. $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \qquad AB = I_n$

Démonstration. Admis pour le moment. □

3 Systèmes linéaires

3.1 Définitions et notations

Définition 11.21

On appelle système linéaire de n équations à p inconnues un système du type

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p & = b_n \end{cases}$$

où $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont des familles d'éléments de $\mathbb{K}$ (tous fixés : leur valeur est connue).

- $x_1, x_2, \ldots, x_p \in \mathbb{K}$ sont les inconnues du système $(\mathcal{S})$.
- Les a_{ij} sont les coefficients du système $(\mathcal{S})$.
- Le n-uplet $(b_1, \ldots, b_n)$ est appelé le second membre du système $(\mathcal{S})$.
- Si $b_1 = \cdots = b_n = 0$, on dit que $(\mathcal{S})$ est un système homogène ou sans second membre.
- On appelle système homogène associé à $(\mathcal{S})$ le système :

$$(\mathcal{S}_0) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p & = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p & = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire le système obtenu en remplaçant le second membre $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ de $(\mathcal{S})$ par $(0, 0, \ldots, 0)$.

Exemple 17. Le système $(\mathcal{S}) : \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 6y = 7 \end{cases}$ est linéaire. Son système homogène associé est $(\mathcal{S}_0) : \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 6y = 0 \end{cases}$

Exemple 18. Dire si les systèmes suivants sont linéaires (les inconnues sont notées x, y, z) :

$$(\mathcal{S}_1) : \begin{cases} 2x + 6y = 0 \\ 6x + 3y = 1 \\ 2x = 5 \end{cases} \qquad (\mathcal{S}_2) : \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \qquad (\mathcal{S}_3) : \begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$(\mathcal{S}_4) : \begin{cases} 2x + 5y = 4z \\ xy = 0 \end{cases} \qquad (\mathcal{S}_5) : \begin{cases} 0 = 0 \end{cases} \qquad (\mathcal{S}_6) : \begin{cases} x^2 = 0 \\ y = 3 \end{cases}$$

Définition 11.22

En reprenant les notations de la Définition 11.21, en posant

$$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

Alors $(x_1, \ldots, x_p)$ est solution de $(\mathcal{S})$ si et seulement si $AX = B$.

- L'équation matricielle $AX = B$ est appelée <u>écriture matricielle</u> du système $(\mathcal{S})$.
- La matrice A est appelée la <u>matrice</u> du système $(\mathcal{S})$.
- Le système $(\mathcal{S}_0)$ a donc pour écriture matricielle $AX = 0$.

Par extension, on dira souvent qu'une équation matricielle $AX = B$ est un système linéaire.

Exemple 19. Le système linéaire

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 0 \\ -2x - 3y = 1 \end{cases}$$

se réécrit

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.2 Structure de l'ensemble des solutions

Notation. On reprend les notations de la partie 3.1. On note S et S_0 l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$ et de $(\mathcal{S}_0)$ respectivement.

Définition 11.23

Un système linéaire $(\mathcal{S})$ est dit compatible s'il admet au moins une solution, i.e. si $S \neq \varnothing$.
Il est dit incompatible s'il n'admet pas de solution, i.e. si $S = \varnothing$.

Exemple 20. Le système linéaire $\begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$ est incompatible : $S = \varnothing$.
Un système homogène $AX = 0$ est toujours compatible : en effet $X = 0 \in S_0$, si bien que $S_0 \neq \varnothing$.

Proposition 11.24

On considère le système $(\mathcal{S}) : AX = B$. Son système homogène associé est donc $(\mathcal{S}_0) : AX = 0$.
Si X' est une solution (particulière) de $(\mathcal{S})$, càd $X' \in S$, alors

$$S = \left\{X' + Z \mid Z \in S_0\right\} = X' + S_0$$

Autrement dit $X \in S$ si et seulement si $\exists Z \in S_0 \qquad X = X' + Z$.

Démonstration.

$\square$

Exemple 21. Montrer que la solution du système $(\mathcal{S}) : \begin{cases} x - y = 2 \\ y - z = 7 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$, si elle existe, est unique.

3.3 Opération élémentaire

Définition 11.25

Un système linéaire $(\mathcal{S})$ est équivalent à un système linéaire $(\mathcal{S}')$ si les systèmes $(\mathcal{S})$ et $(\mathcal{S}')$ ont les mêmes ensembles de solution.

La méthode du pivot de Gauss consiste à effectuer des opérations (dites élémentaires) sur un système $(\mathcal{S})$ afin de se ramener à un système $(\mathcal{S}')$ plus simple qui est équivalent à $(\mathcal{S})$.

Définition 11.26 (Opération élémentaire)

Soit $(\mathcal{S})$ un système linéaire dont on note $L_1, \dots, L_n$ les lignes correspondant à chaque équation. On appelle opération élémentaire une de ces trois opérations sur les lignes de $(\mathcal{S})$:

- **Dilatation :** on multiplie une ligne L_i par un élément $\mu \in \mathbb{K}^*$: $\boxed{L_i \leftarrow \mu L_i}$.
- **Permutation :** on échange deux lignes L_i et L_j : $\boxed{L_i \leftrightarrow L_j}$
- **Transvection :** on ajoute à L_i une ligne L_j $(i \neq j)$ multipliée par $\lambda \in \mathbb{K}$: $\boxed{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j}$

Proposition 11.27

Toute opération élémentaire effectuée sur un système linéaire $(\mathcal{S})$ le transforme en un système linéaire qui lui est équivalent.

Démonstration. Admis pour le moment. □

Exemple 22. Résoudre $\begin{cases} x - y = 2 \\ y - z = 7 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

3.4 Algorithme du pivot de Gauss

Définition 11.28

On appelle matrice échelonnée une matrice (pas forcément carrée) de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix}
 & \boxed{*} & * & * & * & * & * & * & * & * & & * & * & * & * \\
 & 0 & & & & \boxed{*} & * & * & * & * & & * & * & * & * \\
(0) & 0 & & (0) & & 0 & & & & \boxed{*} & & * & * & * & * \\
 & 0 & & & & 0 & & & & 0 & & * & * & * & * \\
 & 0 & & & & 0 & & (0) & & 0 & \ddots & * & * & * & * \\
 & 0 & & & & 0 & & & & 0 & & \boxed{*} & * & * & * \\
 & 0 & & & & 0 & & & & 0 & & 0 & & & \\
 & 0 & & & & 0 & & & & 0 & & 0 & & (0) &
\end{pmatrix}$$

où :

- $*$ désigne un élément quelconque de $\mathbb{K}$.
- $\boxed{*}$ désigne un élément *non nul* quelconque de $\mathbb{K}$, appelé pivot de la matrice échelonnée.
- (0) désigne un bloc rempli de zéros : ci-dessus chaque bloc est représenté avec une largeur de trois colonnes, mais en fait chaque bloc peut avoir une largeur différente. Il est même possible qu'un ou plusieurs blocs soient de largeur “zéro colonne”.

Exemple 23. Les matrices de formes suivantes sont échelonnées :

$$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{*} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{*} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \boxed{*} & * & * \\ 0 & \boxed{*} & * \\ 0 & 0 & \boxed{*} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \boxed{*} & * & * & * & * & * \\ & & & \boxed{*} & * & * \\ & & & & \boxed{*} & * \\ 0 & & & & & \boxed{*} \end{pmatrix}$$

Exemple 24. Les matrices suivantes sont-elles échelonnées ?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Méthode (Algorithme du pivot de Gauss)

Étant donné un système linéaire $AX = B$, on lui associe sa matrice augmentée comme étant la matrice

$$A' = (A\,|B\,) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1p} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} & b_n \end{array}\right)$$

L'algorithme du pivot de Gauss consiste à effectuer des opérations élémentaires sur les *lignes* de la matrice A' de façon à se ramener à une matrice échelonnée à gauche de la barre :

1. **Recherche du pivot (cas $a_{11} \neq 0$) :** on regarde la première colonne $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$. Supposons pour

commencer que $a_{11} \neq 0$: on l'encadre : ce sera un pivot. On a donc :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} & b_n \end{array}\right)$$

2. **Élimination des termes sous le pivot :** on fait des transvections pour faire apparaitre des zéros sous le pivot $\boxed{a_{11}}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & b_1 \\ 0 & & & & * \\ \vdots & & * & & \vdots \\ 0 & & & & * \end{array}\right) \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - \dfrac{a_{21}}{a_{11}} L_1 \\ \vdots \\ L_n \leftarrow L_n - \dfrac{a_{n1}}{a_{11}} L_1 \end{array}$$

3. **On poursuit avec une "sous-matrice" :** on recommence l'algorithme à l'étape 1 avec la sous-matrice qui contient les termes $*$ (en rouge ci-dessous) :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & b_1 \\ 0 & & & & * \\ \vdots & & * & & \vdots \\ 0 & & & & * \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & b_1 \\ 0 & & & & * \\ \vdots & & * & & \vdots \\ 0 & & & & * \end{array}\right)$$

1bis **Recherche du pivot (cas $a_{11} = a_{21} = \cdots = a_{n1} = 0$) :** si toute la colonne $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$ est nulle, on recommence l'algorithme à l'étape 1 avec la sous-matrice qui contient les termes $*$ (en rouge ci-dessous) :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1p} & b_1 \\ 0 & & & & * \\ \vdots & & * & & \vdots \\ 0 & & & & * \end{array}\right)$$

1ter **Recherche du pivot (cas $a_{11} = 0$ mais colonne non nulle) :** si $a_{11} = 0$ mais que la colonne $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$ contient un terme non nul, on en choisit un, par exemple $a_{i_0 1} \neq 0$. On fait la permutation $L_{i_0} \leftrightarrow L_1$: on obtient un système de la forme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{a_{i_0 1}} & & & b_{i_0} \\ a_{21} & & & b_2 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & & & b_n \end{array}\right)$$

et on élimine les termes sous le pivot comme à l'étape 2.

On continue l'algorithme jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de matrice à gauche de la barre. On a alors une matrice échelonnée à gauche de la barre : il suffit ensuite de revenir à l'écriture "système" et à résoudre ce système.

Exemple 25. Résoudre $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

Cet exemple est simple car les cas 4 et 5 de l'algorithme n'arrivent jamais. De plus, il y a autant de pivots que d'inconnues, donc on obtient un système "triangulaire" qu'on peut remonter facilement pour parvenir à la solution.

Méthode

Avec la méthode du pivot de Gauss, on obtient une matrice augmentée échelonnée avec des pivots. On peut alors mettre la matrice sous forme échelonnée réduite : avec des transvections (sur les lignes), on fait apparaitre des zéros *au-dessus* de chaque pivot.
Les variables qui ont des pivots dans leur colonne sont appelées des variables pivots. Les variables qui n'ont pas de pivots dans leurs colonnes sont les variables libres.
Pour déterminer précisément S, il faut exprimer les variables pivots en fonction des variables libres, qui elles peuvent prendre des valeurs quelconques dans $\mathbb{K}$.

Exemple 26. Résoudre $\begin{cases} x + 2y + z - 2t = 6 \\ 2x + 2z + 4t = 2 \end{cases}$

Exemple 27. Résoudre $\begin{cases} x+2y=4 \\ 2x+4y=2 \\ x+y=1 \end{cases}$

Exemple 28. Résoudre $\begin{cases} x+2y+2z=3 \\ -2x-4y-5z=6 \\ x+2y+z=15 \end{cases}$

3.5 Calcul de l'inverse d'une matrice par la méthode du pivot

Méthode (Calcul de l'inverse par le pivot de Gauss)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On cherche à vérifier si A est inversible et, si c'est le cas, à calculer A^{-1}.
On construit d'abord une matrice augmentée

$$(A \mid I_n)$$

Puis, par des opérations élémentaires (dilatation, permutation, transvection) sur les *lignes* on échelonne la matrice A, à gauche de la barre.

- Si dans la matrice échelonnée il y a n pivots, càd qu'on obtient une matrice augmentée de la forme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{*} & & * & \\ & \ddots & & * \\ 0 & & \boxed{*} & \end{array}\right)$$

  alors A est inversible. On se ramène alors par des opérations élémentaires à

$$(I_n \mid A')$$

  et dans ce cas, $A' = A^{-1}$ est la matrice inverse recherchée.
- Si dans la matrice échelonnée il y a moins de n pivots, alors A n'est pas inversible : on peut s'arrêter là.

Exemple 29. Vérifier si $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 7 & 0 \\ -3 & 3 & -10 \end{pmatrix}$ est inversible et si c'est le cas, calculer A^{-1}.

Exemple 30. Vérifier si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et si c'est le cas, calculer A^{-1}.

Proposition 11.29 (Inversibilité des matrices diagonales)

Soit $A = \operatorname{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ avec $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Alors $A \in GL_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont tous non nuls et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{-1} & & & \text{\huge 0} \\ & \alpha_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & \alpha_n^{-1} \end{pmatrix}$$

Démonstration. La matrice $A = \operatorname{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est déjà sous forme échelonnée : si un α_i est non nul, c'est un pivot, sinon la colonne correspondante est remplie de zéros. Il y a ainsi autant de pivots dans A que de coefficients α_i non nuls.

$A \in GL_n(\mathbb{K})$ si et seulement si elle contient n pivots, donc si et seulement si $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}^*$. □

Proposition 11.30 (Inversibilité de matrices triangulaires)

Soit $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ telle que

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \text{\huge $*$} \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & \alpha_n \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$$

Alors $A \in GL_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont tous non nuls et A^{-1} est de la forme

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{-1} & & & \text{\huge $*'$} \\ & \alpha_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & \alpha_n^{-1} \end{pmatrix}$$

(Attention : les termes de $*'$ dans A^{-1} ne sont pas forcément les mêmes que les termes contenus dans $*$ dans A)

Démonstration. La matrice A est déjà sous forme échelonnée : si un α_i est non nul, c'est un pivot, sinon la colonne correspondante ne contient pas de pivot. Il y a ainsi autant de pivots dans A que de coefficients α_i non nuls.

$A \in GL_n(\mathbb{K})$ si et seulement si elle contient n pivots, donc si et seulement si $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}^*$.

La forme de A^{-1} peut se démontrer à partir de la méthode du calcul de l'inverse par le pivot de Gauss. □

4 Transposition

4.1 Définition et propriétés

Définition 11.31 (Matrice transposée)

Soit $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle (matrice) transposée de A, la matrice notée $A^\top$ telle que $A^\top\in\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et telle que le coefficient d'indice (i,j) de $A^\top$ est a_{ji}.
En d'autres termes, $A^\top$ est obtenu à partir de A en faisant la "symétrie" de A par rapport à sa "diagonale".

Exemple 31. Si $A=\begin{pmatrix}1&0&3\\3&i&0\\0&3&-1\end{pmatrix}$ alors $A^\top=\begin{pmatrix}1&3&0\\0&i&3\\3&0&-1\end{pmatrix}$.

Exemple 32. Si $A=\begin{pmatrix}1&3&5\\2&4&6\end{pmatrix}$ alors $A^\top=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}$.

Proposition 11.32

Soit $A,B\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1 $(A^\top)^\top=A$.

2 Pour tous $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$, $(\lambda A+\mu B)^\top=\lambda A^\top+\mu B^\top$.

Démonstration.

□

Proposition 11.33

Soit $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors $(AB)^\top=B^\top A^\top$.

Démonstration.

□

Proposition 11.34

Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Alors $A^\top \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.

Démonstration.

□

4.2 Matrices carrées symétriques et antisymétriques

Définition 11.35 (Matrice symétrique)

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est <u>symétrique</u> si $A^\top = A$, càd si pour tous i, j, $a_{ij} = a_{ji}$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques.
On dit que A est <u>antisymétrique</u> si $A^\top = -A$, càd si pour tous $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ij} = -a_{ji}$. On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

Ces deux notions n'ont de sens que pour une matrice carrée : si A n'est pas carrée, alors A et $A^\top$ n'ont pas la même taille et ne peuvent donc pas être égales.

Exemple 33. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ est symétrique. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

Proposition 11.36

Si une matrice A est antisymétrique, alors les coefficients sur sa diagonale sont nuls.

Démonstration.

□